

**Recasages possibles** : 148, 149, 170.

**Référence** : Carnet de voyage en algèbre, CALDERO, PERONNIER (p. 112-115).

### Développement

**Lemme 1** Soit  $m > 0$  et  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^{2m}$  définie par  $q(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$ . Si  $F$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^{2m}$  totalement isotrope pour  $q$ , alors  $\dim(F) \leq m$ .

**Théorème 2 (Flanders)** Soit  $\mathcal{E}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $r$  le maximum des rangs des éléments de  $\mathcal{E}$ . Alors,  $\dim(\mathcal{E}) \leq nr$ .

**Corollaire 3** Tout sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de codimension  $< n$  intersecte  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

- *Preuve du Lemme 1* : Montrons tout d'abord que  $q$  est non dégénérée. Si on note

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

on voit que la matrice de  $q$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2m}$  est exactement la matrice diagonale par blocs

$$A = \begin{pmatrix} S & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & S \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\det(A) = \det(S)^m = \frac{(-1)^m}{4^m} \neq 0$ , donc  $q$  est bien non dégénérée. Soit maintenant  $F$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^{2m}$  totalement isotrope pour  $q$ . Puisque  $F$  est totalement isotrope, on a  $F \subset F^\perp$ . En effet, en utilisant la formule de polarisation, on voit que pour tous  $x, y \in F$ , on a

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = 0.$$

Par conséquent, tout  $x \in F$  est orthogonal à  $F$ , ce qui revient exactement à dire que  $F \subset F^\perp$ . Or, la forme quadratique  $q$  étant non dégénérée, on a

$$\dim(F^\perp) = \dim(\mathbb{R}^{2m}) - \dim(F) = 2m - \dim(F).$$

Ainsi,  $\dim(F) \leq \dim(F^\perp) = 2m - \dim(F) \Rightarrow 2\dim(F) \leq 2m \Rightarrow \dim(F) \leq m$ . Ceci termine la preuve du **Lemme 1**.

- *Preuve du Théorème 2* : On découpe la preuve en plusieurs étapes. L'étape 1 consiste à se ramener au cas où on a

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}.$$

Dans l'étape 2, on montre que si  $Y \in \mathcal{E}$ , alors  $Y$  est de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}$$

où  $Y_{1,1} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ ,  $Y_{1,2} \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})$ ,  $Y_{2,1} \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})$  et  $Y_{2,1} Y_{1,2} = 0_{n-r, n-r}$ . Enfin, on conclut dans l'étape 3.

- *Étape 1* : Soit  $A \in \mathcal{E}$  de rang  $r$ . On sait (étude de l'action de Steinitz) que  $A$  et  $J_r$  sont semblables, i.e qu'il existe  $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = P J_r Q^{-1}$ . Alors le sous-espace  $\mathcal{E}' = P^{-1} \mathcal{E} Q$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contient  $J_r$ , et comme l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & P^{-1} M Q \end{array}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels,  $\dim(\mathcal{E}') = \dim(\mathcal{E})$ . Enfin, comme le rang est invariant par multiplication (à gauche ou à droite) par une matrice inversible, le maximum des rangs des éléments de  $\mathcal{E}'$  est encore  $r$ . Ainsi, il suffit de démontrer le théorème de Flanders pour  $\mathcal{E}'$  et on le déduira pour  $\mathcal{E}$ , ou autrement dit, on peut supposer que  $J_r \in \mathcal{E}$ .

- *Étape 2* : Soit  $Y \in \mathcal{E}$ , que l'on écrit par blocs

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_{1,1} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) & ; & Y_{1,2} \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R}) ; \\ Y_{2,1} \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R}) & ; & Y_{2,2} \in \mathcal{M}_{n-r, n-r}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Pour  $i$  (resp  $j$ ) dans  $\llbracket r+1, s \rrbracket$ , on note  $L_i \in \mathcal{M}_{1, r}(\mathbb{R})$  (resp.  $C_j \in \mathcal{M}_{r, 1}(\mathbb{R})$ ) la partie de la ligne  $i$  (resp de la colonne  $j$ ) de  $Y$  qui apparaît dans le bloc  $Y_{2,1}$  (resp.  $Y_{1,2}$ ). On va montrer que pour tous  $i, j \in \llbracket r+1, s \rrbracket$ , le coefficient  $y_{i,j}$  (qui figure donc dans le bloc  $Y_{2,2}$ ) est nul et que  $L_i C_j = 0$ . Pour cela, fixons  $i, j \in \llbracket r+1, s \rrbracket$  et considérons pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  la matrice

$$Y(\lambda) = J_r + \lambda Y = \begin{pmatrix} I_r + \lambda Y_{1,1} & \lambda Y_{1,2} \\ \lambda Y_{2,1} & \lambda Y_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Puisque  $J_r, Y \in \mathcal{E}$  et que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $Y(\lambda) \in \mathcal{E}$ . En particulier,  $\text{rang}(Y(\lambda)) \leq r$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ainsi, pour

$\lambda \in \mathbb{R}$ , tous les mineurs de taille  $r + 1$  de  $Y(\lambda)$  sont nuls. On extrait donc de  $Y(\lambda)$  la sous-matrice de taille  $r + 1$  obtenue en gardant les  $r$  premières lignes et colonnes ainsi que la ligne  $i$  et la colonne  $j$  : on obtient la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} I_r + \lambda Y_{1,1} & \lambda C_j \\ \lambda L_i & \lambda y_{i,j} \end{pmatrix},$$

dont on note  $P_{i,j}(\lambda)$  le déterminant :  $P_{i,j}(\lambda) = \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{1,1} & \lambda C_j \\ \lambda L_i & \lambda y_{i,j} \end{vmatrix}$ . D'après le raisonnement précédent, on a pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P_{i,j}(\lambda) = 0$ . De plus, par polynômialité du déterminant,  $P_{i,j}$  est une fonction polynômiale en  $\lambda$ , donc comme  $\mathbb{R}$  est infini, on peut identifier polynôme et fonction polynômiale associée, *i.e* les coefficients du polynôme  $P_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$  sont tous nuls. L'idée est désormais d'écrire les coefficients devant les termes de degré 1 et 2 de ce polynôme, ce qui permettra de conclure. Par linéarité en la dernière colonne, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P_{i,j}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{1,1} & C_j \\ \lambda L_i & y_{i,j} \end{vmatrix} =: \lambda Q_{i,j}(\lambda),$$

où  $Q_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$  est encore le polynôme nul car  $0 = P_{i,j}(X) = XQ_{i,j}(X)$  (et  $\mathbb{R}[X]$  est intègre!). On cherche donc à exprimer les termes de degré 0 et 1 de  $Q_{i,j}(X)$ . Le terme de degré 0 est

$$0 = Q_{i,j}(0) = \begin{vmatrix} I_r & C_j \\ 0 & y_{i,j} \end{vmatrix} = y_{i,j},$$

ce qui donne bien  $y_{i,j} = 0$ . On a donc par linéarité en la dernière ligne,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, Q_{i,j}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{1,1} & C_j \\ L_i & 0 \end{vmatrix} =: \lambda R_{i,j}(\lambda),$$

où  $R_{i,j}(X) \in \mathbb{R}[X]$ , pour les mêmes raisons que précédemment, est à nouveau le polynôme nul. On a donc

$$0 = R_{i,j}(0) = \begin{vmatrix} I_r & C_j \\ L_i & 0 \end{vmatrix}.$$

Pour calculer ce déterminant, on peut (par exemple) appliquer le pivot de Gauss pour échelonner la matrice correspondante en retranchant à la dernière ligne  $y_{i,k}$  fois la  $k$ -ème ligne pour tout  $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$  (ce qui ne change pas la valeur du déterminant). On obtient

$$0 = \begin{vmatrix} I_r & C_j \\ 0 & -y_{i,1}y_{1,j} - \cdots - y_{i,r}y_{r,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_r & C_j \\ 0 & -L_i C_j \end{vmatrix} = -L_i C_j.$$

Ceci étant vrai pour tous  $i, j \in \llbracket r+1, s \rrbracket$ , on a  $Y_{2,1}Y_{1,2} = 0$  et  $Y_{2,2} = 0$ .

• *Étape 3* : On considère l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{M}_r(\mathbb{R}) \\ Y & \longmapsto & Y_{1,1}. \end{cases}$$

D'après l'étape 2,  $\text{Ker}(\varphi)$  est constitué des matrices  $Y \in \mathcal{E}$  de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \text{ avec } Y_{2,1}Y_{1,2} = 0.$$

Si on note  $Y_{2,1} = (x_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, r \rrbracket}}$  et  $Y_{1,2} = (y_{j,i})_{\substack{i \in \llbracket 1, n-r \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, r \rrbracket}}$ , alors en prenant la trace dans l'égalité  $Y_{2,1}Y_{1,2} = 0$ , on obtient

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ 1 \leq j \leq r}} x_{i,j}y_{j,i} = \text{Tr}(Y_{2,1}Y_{1,2}) = 0.$$

Ainsi, en prenant  $m = r(n-r)$  et  $q$  la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^{2m}$  comme dans le **Lemme 1**, alors  $\text{Ker}(\varphi)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^{2m}$  totalement isotrope pour  $q$ , donc on a par ce lemme,  $\dim(\text{Ker}(\varphi)) \leq m = r(n-r)$ . On applique alors le théorème du rang à  $\varphi$  :

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rang}(\varphi) \leq r(n-r) + r^2 = nr,$$

car  $\text{rang}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathcal{M}_r(\mathbb{R})) = r^2$ . Ceci conclut la preuve du **Théorème 2** de Flanders.

- *Preuve du Corollaire 3* : C'est une application directe du **Théorème 2**. En effet, si  $\mathcal{E}$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ne contenant aucune matrice inversible, alors le maximum des rangs des éléments de  $\mathcal{E}$  est majoré par  $n-1$  donc d'après Flanders,  $\dim(\mathcal{E}) \leq n(n-1) = n^2 - n$ , ce qui signifie que  $\text{codim}(\mathcal{E}) \geq n$ , ce qui prouve par contraposition le **Corollaire 3**.